

А.А. Локшин, Е.А. Иванова

МНОЖЕСТВА И АРИФМЕТИЧЕСКИЕ АЛГОРИТМЫ

*Второе издание,
исправленное и дополненное*



МОСКВА – 2019

УДК 372.8(072):511
ББК 22.130я71
Л73

Локшин А.А., Иванова Е.А.

Л73 Множества и арифметические алгоритмы. – 2-е изд.,
испр. и доп. – М.: МАКС Пресс, 2019. – 48 с.: ил.
ISBN 978-5-317-06057-2

В книжке излагаются основы количественной теории натуральных чисел, основной упор при этом сделан на обосновании («на языке множеств») арифметических алгоритмов – сложения и вычитания столбиком, умножения столбиком и деления уголком. Обычно обоснование этих алгоритмов проводится не на «языке множеств», а чисто арифметически, с опорой на коммутативность и ассоциативность сложения и умножения, дистрибутивность умножения относительно сложения и вычитания и другие арифметические законы.

Книжка адресована студентам педагогических институтов – будущим учителям начальных классов, а также родителям младших школьников.

УДК 372.8(072):511
ББК 22.130я71

Учебное издание

ЛОКШИН Александр Александрович
ИВАНОВА Елена Алексеевна

**МНОЖЕСТВА
И АРИФМЕТИЧЕСКИЕ АЛГОРИТМЫ**

2-е изд., испр. и доп.

Подготовка оригинал-макета:
Издательство «МАКС Пресс»
Главный редактор: *Е.М. Бугачева*
Компьютерная верстка: *Н.С. Давыдова*
Обложка: *М.А. Еронина*

В издании использованы рисунки А.А. Локишина

Подписано в печать 04.02.2019 г.
Формат 84х108 1/32. Усл.печ.л. 2,52. Тираж 50 экз. Заказ 021.

Издательство ООО «МАКС Пресс». Лицензия ИД N 00510 от 01.12.99 г.
119992, ГСП-2, Москва, Ленинские горы, МГУ им. М.В. Ломоносова,
2-й учебный корпус, 527 к.
Тел.8(495) 939-3890/91. Тел./Факс 8(495) 939-3891.

ISBN 978-5-317-06057-2

© Локшин А.А., Иванова Е.А., 2018
© Локшин А.А., Иванова Е.А., 2019, с изменениями
© Оформление. ООО «МАКС Пресс», 2019

Содержание

Предисловие	4
1. Конечные множества	5
2. Определение натурального числа.....	8
3. Число «ноль»	10
4. Отношение «меньше».....	11
5. Сложение	12
6. Вычитание	13
7. Умножение	14
8. Деление	15
9. Десятичная система	17
10. Существование десятичной записи натурального числа ..	18
11. Сравнение натуральных чисел в десятичной записи	20
12. Единственность десятичной записи натурального числа ..	23
13. Алгоритм сложения столбиком (обоснование «с опорой на множества»)	23
14. Алгоритм сложения столбиком (арифметическое обоснование)	26
15. Алгоритм вычитания столбиком (обоснование «с опорой на множества»).....	27
16. Обоснование алгоритма умножения столбиком	29
17. Обоснование алгоритма деления уголком («с опорой на множества»)	33
<i>Добавление 1. Деление на равные части и римский способ деления.....</i>	<i>36</i>
<i>Добавление 2. О переводе обыкновенных дробей в десятичные</i>	<i>40</i>
<i>Добавление 3. О десятичной системе счисления и переводе из p-ичной системы счисления в q-ичную.....</i>	<i>43</i>
Литература.....	47

Предисловие

В этой маленькой книжке мы попытались изложить основы количественной теории натуральных чисел, сделав при этом акцент на обосновании арифметических алгоритмов – сложении и вычитании столбиком, умножении столбиком и делении уголком. Обычно обоснование этих алгоритмов проводится не на «языке множеств», а чисто арифметически, с опорой на коммутативность и ассоциативность сложения и умножения, дистрибутивность умножения относительно сложения и вычитания и другие арифметические законы.

Такой подход представляется нам излишне громоздким и не вполне отвечающим существу дела, поскольку арифметические выкладки лишь приблизительно следуют за шагами упомянутых алгоритмов.

На наш взгляд, более полезным для педагога, более наглядным и убедительным является излагаемый ниже подход к обоснованию арифметических алгоритмов, опирающийся на элементарную («наивную») теорию множеств.

Книжка адресована студентам педагогических институтов – будущим учителям начальных классов, а также родителям младших школьников.

Во втором издании добавлен материал, касающийся перевода обыкновенных дробей в десятичные, а также перевода натурального числа из одной системы счисления в другую.

Авторы признательны И.В. Рублеву за полезные обсуждения.

*Авторы
Москва, январь 2019*

1. Конечные множества

Понятие конечного множества лежит в основе так называемой количественной теории натуральных чисел – наиболее естественного способа ознакомления с понятием натурального числа.

При этом, не пользуясь понятием натурального числа, определить, что такое конечное множество, оказалось не просто.

В конце XIX века известный немецкий математик Р. Дедекинд предложил следующее замечательное определение:

Определение 1.1. Назовем непустое множество A *конечным*, если оно не равномощно никакому своему подмножеству, отличному от A .

Опираясь на определение 1.1, нетрудно показать (см., например, [1]), что справедливо следующее

Утверждение 1.1. *Каждое непустое подмножество конечного множества конечно.*

Однако, опираясь на определение 1.1, уже нелегко доказать, что справедливо также следующее

Утверждение 1.2. *Объединение двух непустых непересекающихся конечных множеств конечно.*

Еще труднее доказать (исходя из дедекиндова определения конечного множества), что справедливо

Утверждение 1.3. *Декартово произведение двух конечных множеств конечно.*

Таким образом, опираясь на дедекиндово определение 1.1, не удастся (по крайней мере, в настоящее время) последовательно провести элементарное изложение количественной теории натуральных чисел.

В результате, в интересах простоты и наглядности, приходится в определенной мере жертвовать строгостью изложения.

Наше изложение будет основано не на дедекиндовом определении 1.1, вместо него мы будем опираться на следующее

Определение 1.2. Пусть A – некоторое множество. Сопоставим взаимно-однозначным образом каждому элементу a множества A единичный отрезок e_a (разным элементам множества A сопоставляются разные единичные отрезки, которые могут перемещаться независимо друг от друга). Если, употребив все элементы из совокупности $\{e_a\}$, удастся составить единый отрезок, то назовем множество A *конечным*.

Замечание. Составить из нескольких отрезков единый отрезок – это значит расположить их (без налегания) на некоторой прямой так, чтобы между расположенными отрезками не оставалось промежутков.

Замечание. Очевидно, что множество, равномощное конечному, также конечно (как в смысле определения 1.2, так и в смысле определения 1.1).

Замечание. В отличие от определения 1.1, определение 1.2 позволяет сразу заключить, что утверждение 1.2 верно.

Действительно, если непересекающиеся множества A и B конечны, то в нашем распоряжении имеются два непересекающихся отрезка \bar{A} и \bar{B} , составленных соответственно из наборов $\{e_a\}$ и $\{e_b\}$. Из этих двух отрезков, очевидно, можно всегда составить единый отрезок (см. рис. 1.1).



Рис. 1.1

Замечание. Расположение набора отрезков $\{e_a\}$ в виде единого отрезка \bar{A} очевидным образом задает упорядочение элементов множества A . Мы будем считать *геометрически очевидным*, что *при любом* упорядочении элементов множества A результирующий отрезок \bar{A} останется тем же самым. Отсюда делаем вывод, что если $C \subset A$ (C является подмножеством множества A , причем $C \neq A$), то всегда можно считать, что существует отрезок \bar{C} , образованный из набора $\{e_c\}$ и являющийся частью отрезка \bar{A} (см. рис. 1.2). Тем самым приходим к выводу, что утверждение 1.1 верно.

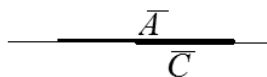


Рис. 1.2

Замечание. Пусть множества A и B конечны в смысле определения 1.2. Покажем, что тогда справедливо утверждение 1.3. Действительно, пусть из системы отрезков $\{e_a\}$ можно составить единый отрезок \bar{A} , а из системы $\{e_b\}$ – единый отрезок \bar{B} . Геометрически очевидно, что, заменив в системе $\{e_a\}$ единичные отрезки на отрезки, равные \bar{B} , мы получим новую систему отрезков $\{\bar{B}_a\}$, из которой по-прежнему можно составить единый отрезок (см. рис. 1.3). Отсюда легко следует справедливость утверждения 1.3.

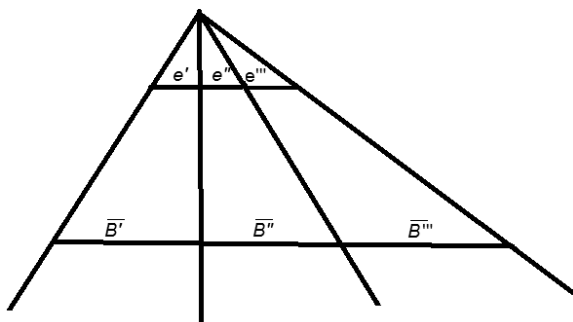


Рис. 1.3

Утверждение 1.4. *Предположим, что множество A является конечным в смысле определения 1.2. Тогда оно является также конечным по Дедекинду (т.е. конечным в смысле определения 1.1).*

Доказательство. Предположим противное, а именно, что некоторое непустое конечное (в смысле определения 1.2) множество A равномощно некоторому своему подмножеству C такому, что $C \neq A$. В этом случае окажется, что отрезок \bar{A} , составленный из всех элементов множества $\{e_a\}$, обязан иметь ту же длину, что и отрезок \bar{C} , составленный *не* из всех элементов множества $\{e_a\}$. Последнее, очевидно, невозможно.

На этом мы заканчиваем наше (математически не вполне строгое) обсуждение понятия конечного множества и переходим к определению натурального числа.

2. Определение натурального числа

Прежде чем давать математическое определение натурального числа, заметим, что человечество шло к осознанию этого понятия в течение тысячелетий. И это совершенно не случайно. Понятие натурального числа является достаточно трудным и требует значительной концентрации внимания для своего осознания.

Итак, дадим соответствующее определение.

Определение 2.1 (см., например, [2]). *Натуральным числом* называется класс равномощных друг другу конечных множеств.

Пример. Например, числом 2 называется класс, состоящий из всех множеств, равномощных множеству рук человека (см. рис. 2.1).

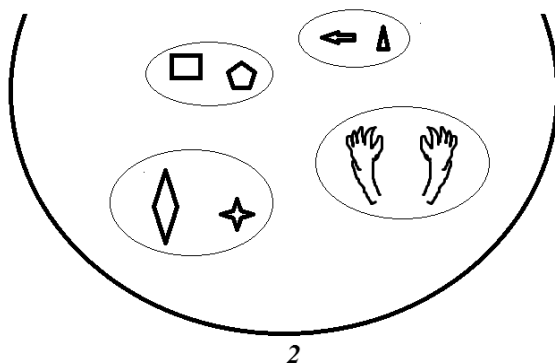


Рис. 2.1

Никакого «более простого» определения для числа 2 дать не удастся. Аналогичным образом определяются остальные натуральные числа.

Для удобства читателя мы привели еще картинку, на которой изображено число 1 (см. рис. 2.2). Класс, названный именем «1» содержит все множества, равномощные множеству, не содержащему никаких других элементов, кроме левой руки человека.

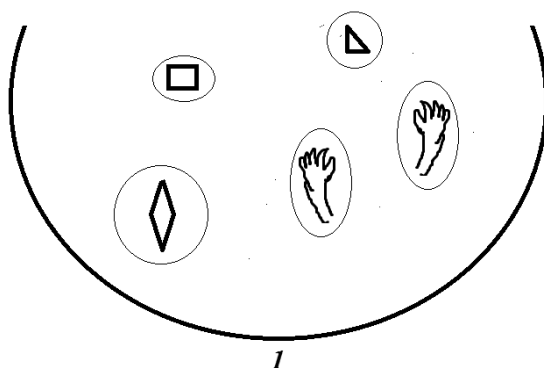


Рис. 2.2

3. Число «ноль»

Выше мы имели дело только с непустыми конечными множествами. Нам будет удобно принять соглашение, согласно которому пустое множество \emptyset мы тоже будем считать конечным.

Очевидно, что ни в один из классов с именами «1», «2», «3», ... мы пустое множество поместить не можем. Поэтому приходится заводить для пустого множества специальный отдельный класс, непохожий на другие, в котором никаких иных множеств, отличных от \emptyset , находиться не будет (см. рис. 3.1).

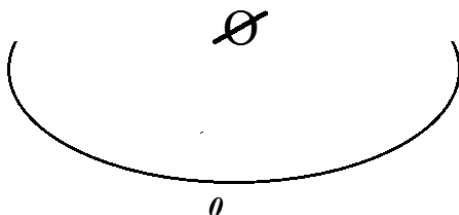


Рис. 3.1

Этот класс мы обозначаем символом «0» (ноль).

Замечание. Число 0 не считается натуральным.

Вот общепринятые обозначения и термины:

Множество всех натуральных чисел $\{1, 2, 3, \dots\}$ обозначают обычно через N , а множество $\{0, 1, 2, 3, \dots\} = N \cup \{0\}$ называют *множеством целых неотрицательных чисел* и обозначают через N_0 .

Замечание. Пусть a – целое неотрицательное число, и пусть множество A принадлежит классу a (т.е. $A \in a$). Тогда говорят, что *численность* множества A равна a и записывают это в виде: $n(A) = a$.

4. Отношение «меньше»

Определение 4.1. Говорят, что число a меньше числа b ($a < b$), если найдутся множество $A \in a$ и множество $B \in b$, такие, что A равномощно некоторому B_1 , где $B_1 \subset B$.

Пример. В комнату вошли люди, но стульев для всех не хватило. Обозначим через C множество стульев, а через L – множество вошедших в комнату людей. Тогда описанная выше ситуация означает, что C равномощно некоторому L_1 , где $L_1 \subset L$ (см. рис. 4.1).

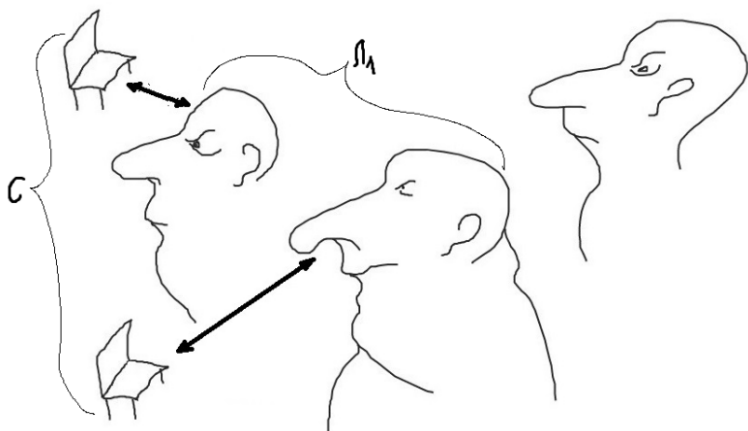


Рис. 4.1

Таким образом, $n(C) < n(L)$.

Можно показать, что отношение «меньше», заданное на N_0 , является отношением *строгого линейного порядка* (см., например, [1]). Мы не будем останавливаться здесь на формулировке и выводе свойств отношения «меньше», считая все эти свойства известными.

5. Сложение

Определение 5.1. Для того, чтобы сложить два целых неотрицательных числа a и b , нужно выбрать два произвольных непересекающихся множества $A \in a$ и $B \in b$ и рассмотреть класс всех равномоощных друг другу конечных множеств, содержащий множество $A \cup B$. Полученный класс множеств называется *суммой* чисел a и b и обозначается $a+b$.

Таким образом,

$$a+b = n(A \cup B),$$

если

$$n(A) = a, n(B) = b \text{ и } A \cap B = \emptyset.$$

Рис. 5.1 иллюстрирует это определение.

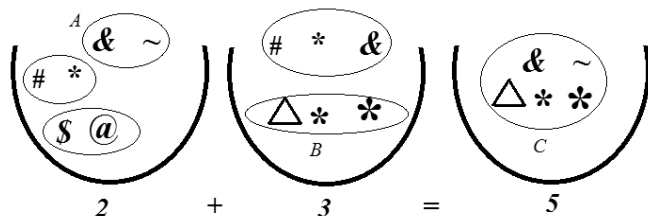


Рис. 5.1

Замечание. Можно показать, что определение суммы чисел a и b не зависит от выбора непересекающихся множеств $A \in a$ и $B \in b$.

Из определения 5.1 легко следуют важнейшие законы арифметики:

$$a + b = b + a \quad (5.1)$$

(коммутативность сложения)

и

$$(a + b) + c = a + (b + c) \quad (5.2)$$

(ассоциативность сложения);

см. по этому поводу, например, [1].

Замечание. При помощи операции сложения мы можем упорядочить все целые неотрицательные числа:

$$0 + 1 = 1; 1 + 1 = 2; 2 + 1 = 3; \dots$$

6. Вычитание

Определение 6.1. Пусть a и b – целые неотрицательные числа, причем $a \leq b$. Выберем два произвольных множества $A \in a$ и $B \in b$ и рассмотрим любое равномошное множеству A подмножество $B_1 \subseteq B$. Тогда по определению *разность* чисел b и a равна

$$b - a = n(B \setminus B_1).$$

Замечание. Можно показать, что разность $b - a$ не зависит от выбора конкретных множеств A, B, B_1 , перечисленных в определении 6.1.

Справедливы следующие важнейшие свойства вычитания на множестве целых неотрицательных чисел (предполагается, что все участвующие в формулах разности существуют, т.е. принадлежат N_0):

$$(a + b) - c = a + (b - c) \quad (6.1)$$

(вычитание числа из суммы);

$$a - (b + c) = (a - b) - c \quad (6.2)$$

(вычитание суммы из числа);

$$a - (b - c) = (a - b) + c \quad (6.3)$$

(вычитание разности из числа).

Все эти формулы можно без труда вывести из определения 6.1.

Формулами (6.1)–(6.3) пользуются ученики в начальной школе, преобразуя арифметические выражения. (В старших классах помнить эти соотношения уже не нужно, поскольку все они следуют из правил действия с целыми, а не только целыми неотрицательными числами.)

Из определений 5.1 и 6.1 легко следует также, что сложение и вычитание являются взаимно обратными операциями, а именно:

$$a + b = c \text{ тогда и только тогда, когда } a = c - b \quad (6.4)$$

(см. рис. 6.1).

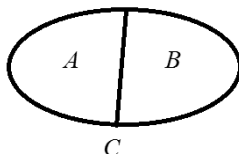


Рис. 6.1

Замечание. Как уже говорилось выше, свойства вычитания (6.1)–(6.3) могут быть выведены непосредственно из определения 6.1, т.е. «с опорой на множества». Нетрудно показать, что эти же свойства могут быть получены путем преобразования формул (т.е. чисто арифметически, без «опоры на множества»), исходя из свойств сложения и обратности вычитания к сложению.

7. Умножение

Определение 7.1. Пусть a и b – целые неотрицательные числа. Тогда их *произведение* $a \cdot b$ определяется соотношениями:

$$a \cdot b = a + a + \dots + a \text{ (} b \text{ слагаемых), если } b \geq 1; \quad (7.1)$$

$$a \cdot 0 = 0. \quad (7.2)$$

(В дальнейшем точку – знак умножения – мы будем опускать, если это не приводит к двусмысленности.)

Из определения 7.1 следует, что для натуральных a и b их произведение может быть также задано формулой:

$$ab = n(A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_b), \quad (7.3)$$

где

$$A_i \cap A_j = \emptyset \text{ при } i \neq j \text{ и } n(A_i) = a. \quad (7.4)$$

Из (7.3), (7.4) нетрудно вывести законы умножения:

$$ab = ba \quad (7.5)$$

(коммутативность умножения);

$$(ab)c = a(bc) \quad (7.6)$$

(ассоциативность умножения);

$$(a \pm b)c = ac \pm bc \quad (7.7)$$

(правая дистрибутивность умножения относительно сложения и вычитания);

$$c(a \pm b) = ca \pm cb \quad (7.8)$$

(левая дистрибутивность умножения относительно сложения и вычитания).

8. Деление

Определение 8.1. Пусть a и b – натуральные числа.

Разделить a на b с остатком – это значит представить a в виде

$$a = qb + r, \quad 0 \leq r < b. \quad (8.1)$$

Здесь *неполное частное q и остаток r* – целые неотрицательные числа.

Замечание. Вместо (8.1) иногда пользуются записью

$$a : b = q \text{ (ост. } r) \quad (8.1')$$

Можно показать, что чисто арифметическое («не опирающееся на множества») определение 8.1 эквивалентно следующему.

Определение 8.2. Пусть a и b – натуральные числа.

Представим некоторое множество $A \in a$ в виде

$$A = A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_b \cup R, \quad (8.2)$$

где множества A_i попарно не пересекаются друг с другом, а также с множеством R , причем

$$n(A_1) = n(A_2) = \dots = n(A_b), \quad (8.3)$$

$$n(R) < b. \quad (8.4)$$

Тогда численность любого из множеств A_i называется *неполным частным*, а численность множества R – *остатком* от деления a на b .

Замечание. Хотя определение 8.2 кажется более громоздким, чем «чисто арифметическое» определение 8.1, именно им удобнее пользоваться при объяснении алгоритма деления «уголком».

Замечание. В случае, когда в (8.1) $r = 0$, говорят, что a делится нацело на b и записывают это в виде

$$a : b = q \quad (8.5)$$

(q в этом случае называют *частным* от деления a на b).

Замечание. Деление нацело обычно называют просто *делением*. Нетрудно видеть, что операция деления является обратной по отношению к умножению:

$$a : b = q \text{ тогда и только тогда, когда } a = qb. \quad (8.6)$$

Мы не будем здесь перечислять свойства операции деления, выводимые из обратности деления по отношению к умножению; см. в этой связи [1].

Отметим только, что (в отличие от умножения) операция деления обладает лишь односторонней дистрибутивностью относительно сложения и вычитания:

$$(a \pm b) : c = a : c \pm b : c, \quad (8.6)$$

но

$$c : (a \pm b) \neq c : a \pm c : b.$$

9. Десятичная система

Рассмотрим какое-нибудь натуральное число в привычной нам десятичной записи. Например, число

$$457. \quad (9.1)$$

Такая привычная нам запись называется *краткой*. (В этой записи присутствует 7 единиц *первого разряда*, 5 единиц *второго разряда* и 4 единицы *третьего разряда*.)

Подробная десятичная запись этого же числа выглядит так:

$$4 \cdot 10^2 + 5 \cdot 10^1 + 7 \cdot 10^0. \quad (9.2)$$

Поскольку $10^0 = 1$, $10^1 = 10$, вместо записи вида (9.2) используют обычно запись

$$4 \cdot 10^2 + 5 \cdot 10 + 7 \quad (9.3)$$

(и эту запись тоже называют подробной).

В общем случае подробная десятичная запись натурального числа a выглядит так:

$$a = a_k 10^k + a_{k-1} 10^{k-1} + \dots + a_1 10 + a_0. \quad (9.4)$$

Соответствующая краткая запись выглядит соответственно так:

$$a = \overline{a_k a_{k-1} \dots a_1 a_0} \quad (9.5)$$

(черта над выражением в правой части (9.5) нужна для того, чтобы не перепутать это выражение с обозначением произведения).

Подчеркнем, что в (9.4) и (9.5) $a_k, a_{k-1}, \dots, a_1, a_0$ – цифры, т.е. принадлежат множеству $\{0, 1, 2, 3, \dots, 9\}$, причем $a_k \neq 0$.

10. Существование десятичной записи натурального числа

Вопрос о том, каждое ли натуральное число можно представить в десятичной записи, вполне правомерен. Сейчас мы получим на него утвердительный ответ, опираясь на коротко изложенную выше теорию натуральных чисел.

Итак, пусть a – произвольно взятое натуральное число. Как мы знаем, это число представляет собой численность некоторого конечного множества A , причем природа элементов множества A совершенно не важна.

Нам будет удобно считать, что множество A представляет собой совокупность счетных палочек (от этого наше рассмотрение не станет «более примитивным» и «менее строгим»).

Расположим теперь перед собой последовательность ящиков, под которыми будут (справа налево) подписаны их номера, начиная с нулевого номера.

Мы можем считать, что с самого начала (на нулевом этапе) наши счетные палочки все лежали в ящике № 0; см. рис. 10.1.

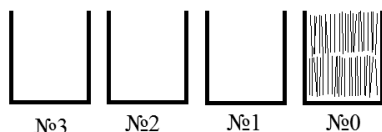


Рис. 10.1

Начнем теперь связывать эти счетные палочки *десятками* и перекладывать связанные десятки в ящик № 1. (Нетрудно видеть, что фактически мы осуществляем деление по 10 в смысле деления «по содержанию»; подробности см. в [1].) После того, как этот (первый) этап завершится, в ящике № 0 останется не больше 9 счетных палочек; мы обозначим число счетных палочек, оставшихся в ящике

№ 0, через a_0 . Затем перейдем к ящику № 1 и повторим процедуру, связывая теперь десятки счетных палочек в *сотни*. После того, как этот (второй) этап закончится, число десятков счетных палочек, оставшихся в ящике № 1, не превысит 9. Обозначим это число через a_1 . Затем перейдем к ящику № 2 и начнем связывать сотни палочек в тысячи. И так далее. В силу того, что множество A наших счетных палочек конечно, процесс на каком-то этапе (для определенности – на k -ом этапе) закончится.

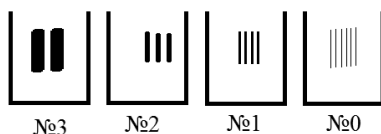


Рис. 10.2

Подсчитаем теперь количество a всех счетных палочек из множества A .

Из определения сложения сразу следует, что

$$a = \text{сумме численностей счетных палочек в каждом из ящиков.} \quad (10.1)$$

Осталось сосчитать численность счетных палочек в каждом отдельно взятом ящике.

Для определенности рассмотрим ситуацию, изображенную на рис. 10.2.

В нулевом ящике, как мы видим, находится 6 палочек.

В ящике №1 имеется 4 *тонких связки* по 10 штук в каждой. Таким образом, общее количество палочек в этом ящике равно

$$10 + 10 + 10 + 10 = 10 \cdot 4 = 4 \cdot 10,$$

(мы воспользовались определением сложения, определением умножения как кратного сложения и коммутативностью умножения).

В ящике № 2 имеется 3 *толстых* связки, каждая из которых содержит по 10 тонких связок. Выясним, прежде всего, какова численность одной толстой связки. Пользуясь определением сложения, а также определением умножения как кратного сложения, получаем, что

$$\begin{aligned} \text{численность толстой связки} = \\ (\text{численность тонкой связки}) \cdot 10 = 10 \cdot 10, \end{aligned}$$

откуда для численности ящика № 2 имеем:

$$\begin{aligned} 10 \cdot 10 + 10 \cdot 10 + 10 \cdot 10 = \\ (10 \cdot 10) \cdot 3 = 3 \cdot (10 \cdot 10) = 3 \cdot 10^2. \end{aligned}$$

Аналогично, вычисляем численность ящика № 3, в котором содержатся *очень толстые* связки:

$$10 \cdot 10 \cdot 10 + 10 \cdot 10 \cdot 10 = (10 \cdot 10 \cdot 10) \cdot 2 = 2 \cdot 10^3.$$

Таким образом, число счетных палочек на рис. 10.2 равно

$$2 \cdot 10^3 + 3 \cdot 10^2 + 4 \cdot 10 + 6 = 2346.$$

В общем случае, очевидно, мы приходим к равенству (9.4). Тем самым мы показали, что для произвольно взятого натурального числа a существует его десятичная запись.

11. Сравнение натуральных чисел в десятичной записи

Пусть имеются два числа, заданные своими десятичными записями: число a (см. (9.4)) и число

$$b = b_p 10^p + b_{p-1} 10^{p-1} + \dots + b_1 10 + b_0. \quad (11.1)$$

Не ограничивая общности, мы можем считать, что в (11.1) $p = k$. Действительно, всегда можно более короткую из двух записей (9.4), (11.1) дополнить спереди нулями.

Итак, сравниваем два числа:

$$\begin{aligned} a &= a_k 10^k + a_{k-1} 10^{k-1} + \dots + a_1 10 + a_0; \\ b &= b_k 10^k + b_{k-1} 10^{k-1} + \dots + b_1 10 + b_0. \end{aligned} \quad (11.2)$$

Начнем теперь сравнивать коэффициенты при одинаковых степенях десятки, начиная со старших разрядов и продвигаясь слева направо (в сторону младших разрядов).

Пусть, например,

$$a_k = b_k, a_{k-1} = b_{k-1}, \dots, a_{s+1} = b_{s+1}, a_s > b_s, \quad (11.3)$$

т.е. *впервые*, при движении в сторону младших разрядов, разрядные слагаемые чисел a и b оказались не равны в s -ом разряде, причем соответствующее разрядное слагаемое в записи числа a оказалось больше.

Покажем, что из (11.3) следует, что

$$a > b. \quad (11.4)$$

Для этого снова прибегнем к интерпретации чисел как численностей множеств счетных палочек.

Вначале рассмотрим число a . Обозначим через

$$A_k, A_{k-1}, A_{k-2}, \dots, A_{s+1}, A_s, \dots, A_1, A_0$$

множества счетных палочек, оказавшихся в ящиках после завершения процедуры, описанной в п. 10. Таким образом, имеем:

$$\begin{array}{ccccccc} A_k & A_{k-1} & & A_{s+1} & A_s & A_1 & A_0 \\ \boxed{\quad} & \boxed{\quad} & \dots & \boxed{\quad} & \boxed{\quad} & \dots & \boxed{\quad} & \boxed{\quad} \\ k & k-1 & & s+1 & s & & 1 & 0 \end{array} \quad (11.5)$$

Аналогично, будем интерпретировать число b как численность множества B счетных палочек, с которыми проведем ту же процедуру, что и с палочками из множества A .

Обозначим через

$$B_k, B_{k-1}, B_{k-2}, \dots, B_{s+1}, B_s, \dots, B_1, B_0$$

множества счетных палочек, оказавшихся в соответствующих ящиках после завершения упомянутой процедуры. Таким образом, имеем:

$$\begin{array}{ccccccc} B_k & B_{k-1} & & B_{s+1} & B_s & & B_1 & B_0 \\ \boxed{} & \boxed{} & \dots & \boxed{} & \boxed{} & \dots & \boxed{} & \boxed{} \\ k & k-1 & & s+1 & s & & 1 & 0 \end{array} \quad (11.6)$$

Начиная с этого момента, ящики, в которых рассортировано множество A , будем называть «верхними», а аналогичные им ящики, по которым разложено множество B , – «нижними».

Учитывая соотношения (11.3), развяжем в множестве A_s одну связку, содержащую 10^s счетных палочек, и превратим эту связку в 10 связок, содержащих по 10^{s-1} счетных палочек. Все эти 10 связок перенесем в (верхний) ящик с номером $s-1$. В (верхнем) ящике с номером $s-1$ сделаем аналогичную процедуру: развяжем одну связку, содержащую 10^{s-1} счетных палочек, и превратим ее в 10 связок по 10^{s-2} счетных палочек в каждой. Затем все эти 10 связок перенесем в (верхний) ящик с номером $s-2$. Продолжая процесс, без труда получим, что

1) в каждом верхнем ящике не меньше счетных палочек, чем в соответствующем нижнем ящике (т.е. в нижнем ящике с тем же номером);

2) в верхнем ящике с номером 0 не меньше десяти счетных палочек, в то время как в нижнем ящике с тем же номером счетных палочек не больше девяти.

В результате заключаем, что численность множества A строго больше численности множества B , т.е. (11.4) установлено.

12. Единственность десятичной записи натурального числа

Тот факт, что натуральное число может быть представлено в десятичной записи единственным образом, легко доказывается от противного. Действительно, предположим, что некоторое натуральное число a может быть представлено в десятичном виде двумя различными способами. Тогда в силу результатов предыдущего пункта мы, очевидно, должны были бы заключить, что $a > a$ (или, что то же самое, что $a < a$). Однако это противоречит свойствам отношения «меньше» (см. по этому поводу, например, [1]).

13. Алгоритм сложения столбиком (обоснование «с опорой на множества»)

Теперь мы, наконец, подошли к цели всего нашего изложения – обоснованию важнейших арифметических алгоритмов.

Начнем с алгоритма сложения столбиком, обоснование которого проведем «с опорой на множества» на конкретном примере.

Пусть требуется вычислить сумму $247 + 365$. Имеем, пользуясь алгоритмом сложения столбиком:

$$\begin{array}{r} 247 \\ + 365 \\ \hline 612 \end{array} \quad (13.1)$$

Для обоснования (13.1) вспомним определение сложения натуральных чисел. Рассмотрим два непересекающихся множества, состоящих из счетных палочек: множество A , принадлежащее классу 247, и множество B , принадлежащее классу 365. Суммой классов 247 и 365 будет класс, содер-

жащий $A \cup B$. Численность множества $A \cup B$ (т.е. класс, которому принадлежит это множество) никак не зависит от того, наделили мы множества A и B какой-нибудь внутренней структурой, или нет. Поэтому мы имеем полное право считать, что счетные палочки в множествах A и B связаны десятками, а десятки связаны тоже по десять штук (так что получились сотни, состоящие из связанных десятков); см. рис. 13.1.

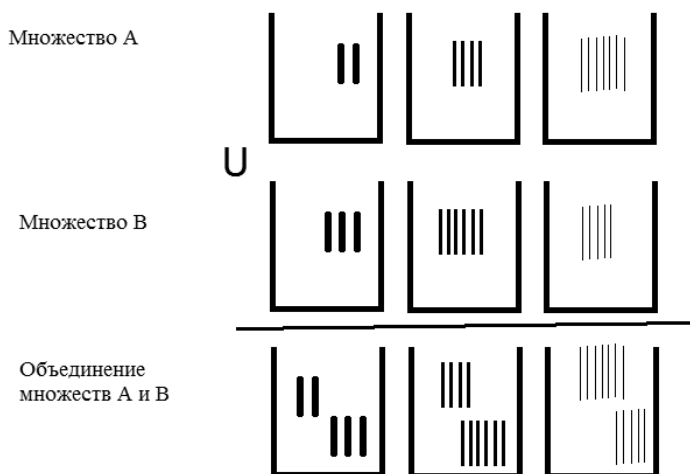


Рис. 13.1

Итак, множество $A \cup B$ мы расположили в трех нижних ящиках, изображенных на рис. 13.1. Рассмотрим теперь (в полном соответствии с алгоритмом сложения столбиком) счетные палочки в правом нижнем ящике; см. рис. 13.1.

Этих палочек, как мы видим, ровно двенадцать штук; свяжем 10 из них и перенесем получившуюся связку в средний нижний ящик. Таких связок в среднем нижнем ящике окажется тогда одиннадцать штук. В полном соот-

ветствии с алгоритмом сложения столбиком, свяжем 10 таких связок в одну сотню и перенесем полученную толстую связку в левый нижний ящик.

В результате множество $A \cup B$ окажется рассортированным по ящикам так, как это показано на рис. 10.2.

Объединение
множеств А и В

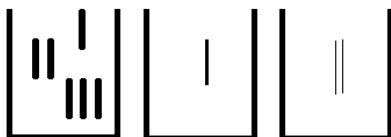


Рис. 13.2

(Подчеркнем, что при процедурах связывания палочек и переноса полученных связок из одного ящика в другой численность множества $A \cup B$ никак не менялась.)

Итак, из рис. 13.2 очевидно, что

$$n(A \cup B) = 612.$$

Тем самым обоснование правила сложения столбиком в нашем конкретном примере завершено. При этом все наши действия со счетными палочками фактически представляли собой «опредмечивание» шагов алгоритма (13.1).

Нетрудно видеть также, что предложенный подход с тем же успехом работает в общем случае.

Замечание. Подчеркнем, что никакими свойствами арифметической операции сложения мы в проведенном обосновании не пользовались.

Замечание. Предложенный подход к обоснованию алгоритма сложения столбиком очевидным образом работает не только в случае десятичной системы счисления, но и в случае любой p -ичной. Как мы увидим ниже, для остальных арифметических алгоритмов ситуация аналогична.

14. Алгоритм сложения столбиком (арифметическое обоснование)

Попробуем теперь обосновать (13.1), опираясь исключительно на арифметические законы.

Имеем:

$$\begin{aligned} 247 + 365 &= (2 \cdot 10^2 + 4 \cdot 10 + 7) + (3 \cdot 10^2 + 6 \cdot 10 + 5) = [(2 \cdot 10^2 + 4 \cdot 10) + (3 \cdot 10^2 + 6 \cdot 10)] + (7 + 5) = [(2 \cdot 10^2 + 4 \cdot 10) + (3 \cdot 10^2 + 6 \cdot 10)] + (1 \cdot 10 + 2) = \\ &= \{(2 \cdot 10^2 + 4 \cdot 10) + (3 \cdot 10^2 + 6 \cdot 10)\} + 1 \cdot 10 + 2 = \\ &= \{(2 \cdot 10^2 + 3 \cdot 10^2) + [(4 \cdot 10 + 6 \cdot 10) + 1 \cdot 10]\} + 2 = \\ &= \{(2 \cdot 10^2 + 3 \cdot 10^2) + [(4 + 6) \cdot 10] + 1 \cdot 10\} + 2 = \\ &= \{(2 \cdot 10^2 + 3 \cdot 10^2) + [1 \cdot 10^2 + 1 \cdot 10]\} + 2 = \\ &= \{(2 + 3) \cdot 10^2 + [1 \cdot 10^2 + 1 \cdot 10]\} + 2 = \\ &= \{5 \cdot 10^2 + [1 \cdot 10^2 + 1 \cdot 10]\} + 2 = \\ &= \{(5 + 1) \cdot 10^2 + 1 \cdot 10\} + 2 = \\ &= 6 \cdot 10^2 + 1 \cdot 10 + 2 = \\ &= 612. \end{aligned}$$

В ходе проведенных преобразований мы пользовались ассоциативностью и коммутативностью сложения, дистрибутивностью умножения относительно сложения, а также таблицей сложения однозначных чисел и правилом записи чисел в десятичной системе.

Нетрудно заметить, однако, что арифметическое обоснование (в отличие от обоснования «с опорой на множества») лишь приблизительно имитирует логику алгоритма сложения столбиком. Действительно, этот алгоритм большинством учеников воспринимается как естественный, но ни о какой дистрибутивности умножения относительно сложения при естественном восприятии этого алгоритма

речи не идет. Иными словами, теоретико-множественное обоснование упомянутого алгоритма обладает, на наш взгляд, значительными преимуществами.

15. Алгоритм вычитания столбиком (обоснование «с опорой на множества»)

Как и выше, мы ограничимся рассмотрением конкретного примера.

Пусть требуется вычислить разность $612 - 365$. Имеем, пользуясь алгоритмом вычитания столбиком:

$$\begin{array}{r} \overset{10}{\overset{10}{6}} \overset{10}{1} \overset{10}{2} \\ - 365 \\ \hline 247 \end{array} \quad (15.1)$$

Мы будем действовать примерно так же, как в п. 13, привнеся в процедуру некоторые незначительные отличия. Итак, рассмотрим множество C такое, что $n(C) = 612$, и не пересекающееся с ним множество B_1 такое, что $n(B_1) = 365$. Оба множества будем считать состоящими из счетных палочек и структурированными описанным выше образом. (Единичные палочки связаны в десятки, десятки десятков связаны в сотни; все связки разложены в соответствующие ящики; см. рис. 15.1.)

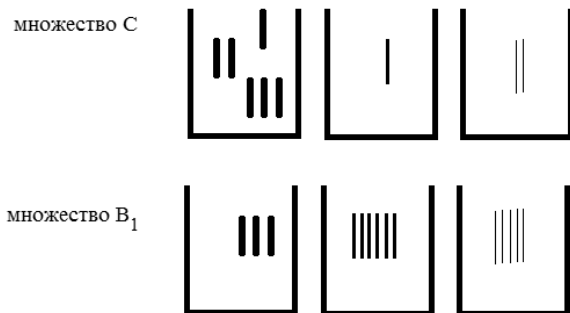
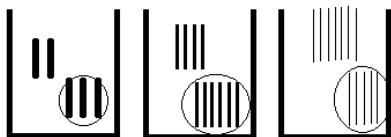


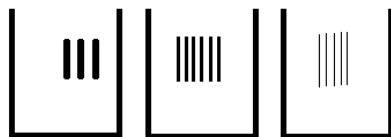
Рис. 15.1

Наша ближайшая цель – выделить в C подмножество, равномощное множеству B_1 , причем сделать это таким образом, чтобы заодно стала ясна теоретико-множественная основа алгоритма (15.1). Совершенно очевидно, что нужно взять одну толстую связку из левого верхнего ящика, изображенного на рис. 15.1, перенести в средний верхний ящик, развязать на тонкие связки (десятки) и одну из тонких связок перенести в правый верхний ящик и там развязать. Результат изображен на рис. 15.2. (Очевидно, что описанная процедура никак не повлияла на численность множества C .)

множество C ;
его подмножество B состоит из
трех частей, которые обведены
кружками



множество B_1



множество $C \setminus B$

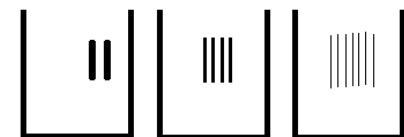


Рис. 15.2

Итак, численность множества $C \setminus B = 247$. Таким образом, вычисленная в строгом соответствии с определением вычитания разность $612 - 365$ совпала со значением, вычисленным при помощи алгоритма вычитания столбиком. При этом мы фактически дали теоретико-множественное обос-

нование упомянутого алгоритма в рассмотренном примере. Перенос наших рассмотрений на общий случай не составляет труда.

Замечание. Арифметическое обоснование алгоритма вычитания столбиком оказывается еще более громоздким, чем аналогичная процедура для операции сложения, и мы этого обоснования не приводим.

16. Обоснование алгоритма умножения столбиком

16.1. Обоснование алгоритма умножения многозначного числа на однозначное

Теоретико-множественное обоснование этого алгоритма по существу ничем не отличается от теоретико-множественного обоснования алгоритма сложения столбиком (незначительное отличие заключается в использовании таблицы умножения в качестве вспомогательного средства).

Рассмотрим пример:

$$\begin{array}{r} \overset{1}{2}\overset{2}{4}7 \\ \times \quad 3 \\ \hline 741 \end{array} \quad (16.1)$$

Приведем обоснование процедуры (16.1) «с опорой на множества». Из определения умножения следует (см. (7.3)), что

$$247 \cdot 3 = n(A \cup B \cup C),$$

где множества A , B , C попарно не пересекаются и

$$n(A) = n(B) = n(C) = 247.$$

Выберем в качестве множеств A , B , C совокупности счетных палочек, соответствующим образом связанных в

десятки и сотни. Тогда объединение $A \cup B \cup C$, очевидно, будет иметь вид, представленный на рис. 16.1.

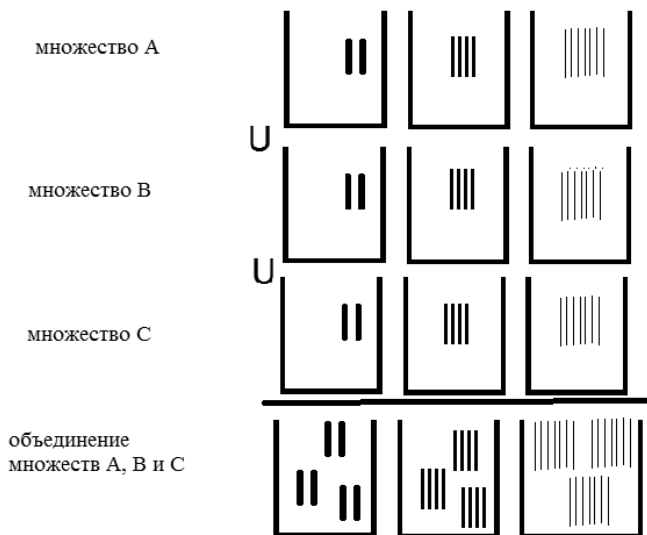


Рис. 16.1

Применяя стандартную процедуру связывания счетных палочек десятками и сотнями (десятками десятков) и перекладывая их в соответствующие ящики, легко получаем, что объединение множеств A, B, C может быть представлено в виде, изображенном на рис. 16.2. Итак, мы получили, что

$$n(A \cup B \cup C) = 741,$$

подтвердив тем самым результат из (16.1). Более того, наши предметные действия со счетными палочками фактически повторяли шаг за шагом алгоритм, использованный в (16.1). Тем самым этот алгоритм получил свое теоретико-множественное объяснение.

Переход от разобранного выше примера к общему случаю не составляет труда.

Замечание. Приведенный выше подход вовсе не будет громоздким, если позволить себе при связывании и перекладывании счетных палочек пользоваться таблицей умножения и таблицей сложения однозначных чисел.

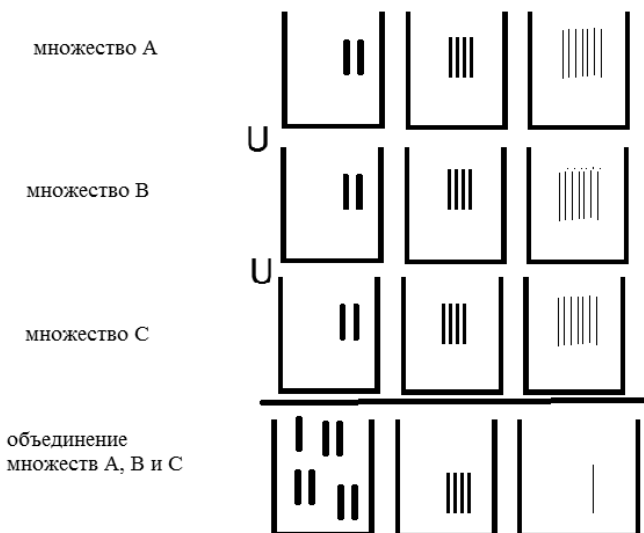


Рис. 16.2

Замечание. Что касается арифметического обоснования алгоритма (16.1), то оно опирается на коммутативность и ассоциативность сложения, на коммутативность и ассоциативность умножения, а также на дистрибутивность умножения относительно сложения (и, конечно, на таблицу умножения). Приведем соответствующие выкладки:

$$\begin{aligned}
 247 \cdot 3 &= (2 \cdot 10^2 + 4 \cdot 10 + 7) \cdot 3 = \\
 &= (2 \cdot 10^2 + 4 \cdot 10) \cdot 3 + 7 \cdot 3 = \\
 &= (2 \cdot 10^2 + 4 \cdot 10) \cdot 3 + (2 \cdot 10 + 1) =
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= [(2 \cdot 10^2 + 4 \cdot 10) \cdot 3 + 2 \cdot 10] + 1 = \\
&= \{(2 \cdot 10^2) \cdot 3 + [(4 \cdot 10) \cdot 3 + 2 \cdot 10]\} + 1 = \\
&= \{(2 \cdot 10^2) \cdot 3 + [4 \cdot (10 \cdot 3) + 2 \cdot 10]\} + 1 = \\
&= \{(2 \cdot 10^2) \cdot 3 + [4 \cdot (3 \cdot 10) + 2 \cdot 10]\} + 1 = \\
&= \{(2 \cdot 10^2) \cdot 3 + [(4 \cdot 3) \cdot 10 + 2 \cdot 10]\} + 1 = \\
&= \{(2 \cdot 10^2) \cdot 3 + [(1 \cdot 10 + 2) \cdot 10 + 2 \cdot 10]\} + 1 = \\
&= \{(2 \cdot 10^2) \cdot 3 + [(1 \cdot 10 + 2) \cdot 10 + 2 \cdot 10]\} + 1 = \\
&= \{(2 \cdot 10^2) \cdot 3 + [(1 \cdot 10 \cdot 10 + 2 \cdot 10) + 2 \cdot 10]\} + 1 = \\
&= \{(2 \cdot 10^2) \cdot 3 + [1 \cdot 10 \cdot 10 + (2 \cdot 10 + 2 \cdot 10)]\} + 1 = \\
&= \{(2 \cdot 10^2) \cdot 3 + [1 \cdot 10 \cdot 10 + (2 + 2) \cdot 10]\} + 1 = \\
&= \{(2 \cdot 10^2) \cdot 3 + [1 \cdot 10^2 + 4 \cdot 10]\} + 1 = \\
&= \{[(2 \cdot 10^2) \cdot 3 + 1 \cdot 10^2] + 4 \cdot 10\} + 1 = \\
&= \{[2 \cdot (10^2 \cdot 3) + 1 \cdot 10^2] + 4 \cdot 10\} + 1 = \\
&= \{[2 \cdot (3 \cdot 10^2) + 1 \cdot 10^2] + 4 \cdot 10\} + 1 = \\
&= \{[(2 \cdot 3) \cdot 10^2 + 1 \cdot 10^2] + 4 \cdot 10\} + 1 = \\
&= \{[6 \cdot 10^2 + 1 \cdot 10^2] + 4 \cdot 10\} + 1 = \\
&= \{(6 + 1) \cdot 10^2 + 4 \cdot 10\} + 1 = \\
&= \{7 \cdot 10^2 + 4 \cdot 10\} + 1 = 741.
\end{aligned}$$

16.2. Обоснование алгоритма умножения многозначного числа на 10^s (s – натуральное)

Покажем, что умножение натурального числа на 10^s сводится к приписыванию s нулей справа к краткой десятичной записи числа.

Это, кстати, единственный случай, когда арифметическое обоснование оказывается проще, чем обоснование «с опорой на множества».

Действительно, рассмотрим пример:

$$247 \cdot 10^3 = (2 \cdot 10^2 + 4 \cdot 10 + 7) \cdot 10^3 = 2 \cdot 10^5 + 4 \cdot 10^4 + 7 \cdot 10^3 = 247\,000.$$

Аналогично рассматривается общий случай.

Обоснование алгоритма умножения натурального числа на 10^s «с опорой на множества» также возможно; при этом удобно сначала ограничиться случаем, когда показатель степени $s=1$, а затем перейти к случаю общего натурального s . Проведение соответствующих выкладок мы оставляем читателю.

16.3. Обоснование алгоритма умножения многозначного числа на многозначное

фактически не требуется, поскольку в силу дистрибутивности умножения относительно сложения этот алгоритм сводится к уже разобранным ранее алгоритмам умножения многозначного числа на однозначное и на 10^s , а также к алгоритму сложения многозначных чисел.

17. Обоснование алгоритма деления уголком («с опорой на множества»)

Мы ограничимся случаем деления многозначного числа на однозначное и, как и выше, все наши рассуждения будем проводить на конкретном примере.

Итак, пусть требуется поделить 217 на 5 (с остатком).

Имеем:

$$\begin{array}{r} \overline{)217} \quad |5 \\ \underline{-20} \quad 43 \\ \underline{-17} \quad 20 \\ \underline{-15} \quad 5 \\ \underline{-5} \quad 0 \end{array}$$

(17.1)

Перейдем теперь к обоснованию процедуры (17.1), а для этого вспомним определение деления как деления на равные части (с остатком).

Итак, рассмотрим множество A , $n(A) = 217$, состоящее из счетных палочек, связанных десятками и десятками десятков (сотнями); см. рис. 17.1.



множество A , $n(A) = 217$

Рис. 17.1

Теперь наша задача – разложить множество A по пяти ящикам поровну (с остатком).

Рассмотрим вначале сотни палочек; по пяти ящикам разложить их поровну, не развязывая, невозможно. Поэтому развяжем обе эти сотни, превратим их в 20 десятков; у нас окажется в результате 21 десяток счетных палочек. Вот их мы и начнем раскладывать поровну по пяти ящикам, в каждом из которых нам будет удобно иметь две полки – верхнюю для связанных десятками палочек, а нижнюю – для отдельных (одиночных) палочек. При этом, пользуясь таблицей умножения, мы можем сразу раскладывать по 4 десятка на верхние полки пяти двухъярусных ящиков.

Итак, мы получаем следующую картину (см. рис. 17.2).

Как видно из рис. 17.2, один связанный десяток счетных палочек оказался лишним. Развяжем его и, присоединив к одиночным счетным палочкам, изображенным на рис. 17.1, начнем раскладывать поровну на нижние полки пяти

двухъярусных ящиков. Пользуясь, как и раньше, таблицей умножения, мы можем раскладывать сразу по 3 палочки на каждую из нижних полок.

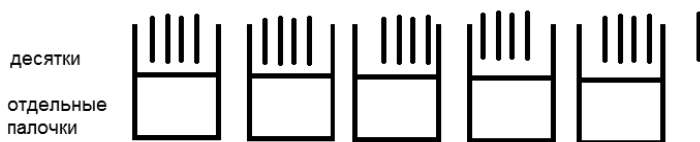


Рис. 17.2

В результате получим распределение счетных палочек по пяти двухъярусным ящикам, изображенное на рис. 17.3, где видно, что две отдельные палочки оказались «лишними».

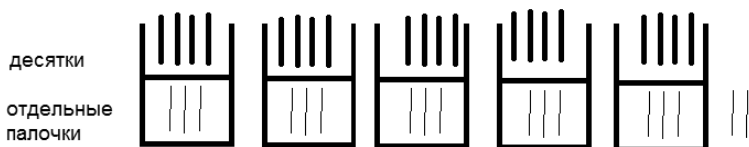


Рис. 17.3

В полном соответствии с определением деления с остатком, из рис. 17.3 следует, что

$$217 : 5 = 43 \text{ (ост. 2),}$$

т.е. мы подтвердили результат, полученный при помощи алгоритма деления уголком в (17.1). Более того, наши предметные действия со счетными палочками фактически копировали процедуру, использованную в (17.1). Тем самым обоснование алгоритма деления уголком в рассматриваемом примере завершено. Переход к общему случаю не составляет труда.

Замечание. Одним из несомненных достоинств алгоритма деления уголком является то, что на каждом его шаге в неполном частном появляется цифра, а не какое-либо число с двумя или большим количеством знаков. Приведем

обоснование этой важной особенности алгоритма деления уголком.

Итак, пусть требуется поделить уголком натуральное число a на некоторое натуральное D .

Обозначим через R остаток, возникающий на каком-либо шаге алгоритма; тогда обязательно

$$R < D. \quad (17.2)$$

Пусть, далее, r – очередная сносимая цифра делимого. Тогда на следующем шаге алгоритма нам нужно будет поделить (снова с остатком) число $10R + r$ на D . Покажем, что

$$10R + r < 10D, \quad (17.3)$$

откуда и будет следовать требуемое утверждение.

Нетрудно видеть, однако, что (17.3) равносильно неравенству

$$r < 10(D - R), \quad (17.4)$$

которое, очевидно, выполняется в силу (17.2) и того факта, что r – цифра.

Добавление 1. Деление на равные части и римский способ деления [6]

Здесь мы разберем один довольно экзотический пример применения теории множеств к обоснованию так называемого «римского способа деления».

Напомним, что римская система счисления, не являясь позиционной, использует мультипликативный принцип записи чисел, причем ведущую роль играет «удесятерение» числовых символов (переход от I к X , от X к C , от C к M).

Способ деления, принятый в римской системе и описанный в [4], исключительно интересен, но неудобен и, по-

видимому, являлся одним из тормозов для развития математики в Древнем Риме. (Заметим, что в Древнем Риме существовал и иной способ деления, столь же громоздкий, однако менее интересный с точки зрения связи с множествами; см. [5].)

Следуя, в основном, [4], рассмотрим древнеримскую процедуру деления с остатком. В целях упрощения мы будем (как и в [4]) пользоваться десятичными обозначениями при описании этого алгоритма.

Пусть требуется поделить 225 на 7. Действуя, подобно тому, как мы поступали выше в п.17, будем считать, что в нашем распоряжении имеется 225 счетных палочек, которые нужно распределить по 7 корзинам. Для того, чтобы сделать изложение более наглядным, нам придется в каждой корзине разместить несколько полок, а самих корзин взять не 7, а 10. Итак,

1*) Прежде всего, делим сотни счетных палочек. Но не на 7, а на 10 (!). То есть распределяем 200 счетных палочек поровну не по семи корзинам, а по десяти. В этом – интересное отличие от современного алгоритма деления углом. (Осуществляется деление на равные части, но на такое количество равных частей, которое на данном этапе не требует обращения к таблице умножения.) В результате имеем:

$$200:10 = 20, \quad (1)$$

т.е. на верхнюю полку каждой корзины кладем по 20 палочек.

2) Однако, три ($3 = 10 - 7$) последних из получившихся десяти наполненных счетными палочками корзин нам в таком виде совершенно не нужны. Поэтому собираем все содержимое этих трех «лишних» корзин и вынимаем оттуда:

$$20 \cdot (10 - 7) = 20 \cdot 3 = 60.$$

Затем добавляем к этим 60 счетным палочкам те 20 счетных палочек, которые мы еще не брали из исходного набора в 225 палочек. В результате получим:

$$60+20=80.$$

4*) Упомянутые в предыдущем пункте 80 палочек снова распределяем поровну по 10 корзинам. В каждую корзину (теперь – на вторую полку сверху) попадает по 8 палочек:

$$80:10 = 8. \quad (2)$$

5) Однако палочки, попавшие в последние три корзины, там совершенно неуместны (мы же хотим осуществить деление на 7 равных частей, а не на 10). Вынимаем их оттуда; всего таких палочек наберется

$$8 \cdot (10 - 7) = 24.$$

6*) 20 из 24-х палочек, упомянутых в предыдущем пункте, снова делим на 10 равных частей:

$$20:10 = 2. \quad (3)$$

Теперь по 2 палочки раскладываем в каждую из 10 корзин, но кладем их на третью полку сверху.

7) В трех последних корзинах лежит всего

$$2 \cdot (10 - 7) = 6$$

палочек. Вынимаем их оттуда и добавляем к ним теперь 4 нетронутые нами палочки из 24 и 5 не бравшихся нами палочек из их исходного количества 225.

В итоге у нас набирается

$$6 + 4 + 5 = 15 \text{ палочек.}$$

8*) 10 из этих 15 палочек распределяем снова поровну по 10 корзинам, но кладем теперь палочки на 4-ю полку сверху в каждой корзине:

$$10:10 = 1.$$

9*) В трех последних корзинах всего находится теперь 3 палочки:

$$1 \cdot (10 - 7) = 3.$$

Вынимаем их оттуда и добавляем к этим трем палочкам 5 палочек из 15 (см. п.7)), которые мы не распределяли по корзинам. В результате у нас наберется всего

$$3 + 5 = 8$$

палочек. Однако $8 = 7 + 1$.

Теперь 7 из этих палочек мы поровну распределим (наконец!) по 7 первым корзинам, а одна палочка останется лишней. В современной записи это выглядит так:

$$8 : 7 = 1 \text{ (ост. 1).} \quad (4)$$

10) Итак, в каждой из семи первых (оставшихся непустыми) корзин лежит по

$20 + 8 + 2 + 1 + 1 = 32$ палочки и одна палочка осталась снаружи. Мы суммировали количества палочек, полученные в соотношениях (1) – (4) (соответствующие пункты нашего алгоритма были отмечены звездочками). Это именно те количества палочек, которые мы раскладывали по полкам в каждой из семи первых корзин.

В современной записи наш результат выглядит следующим образом:

$$225 : 7 = 32 \text{ (ост. 1).} \quad (5)$$

Подчеркнем, что этот результат полностью математически обоснован, поскольку для нас неважен путь, пройдя который, нам удалось поровну распределить 225 палочек по 7 корзинам (и одну оставить снаружи). С точки зрения методики, этот способ деления может представлять интерес, поскольку он позволяет лучше прочувствовать механизм деления на равные части и независимость его результата от промежуточных шагов алгоритма.

Добавление 2. О переводе обыкновенных дробей в десятичные

Алгоритм деления «уголком», переводящий обыкновенные дроби в десятичные, общеизвестен. Однако наглядное объяснение тождества исходной обыкновенной дроби и ее десятичного представления в учебниках обычно отсутствует. Здесь мы собираемся восполнить указанный пробел.

Итак, рассмотрим пример на деление $217 : 6$. Теперь, в отличие от п. 17, мы не ограничимся получением неполного частного и остатка, а неограниченно продолжим процедуру деления уголком.

$$\begin{array}{r}
 \overline{)217} \mid 6 \\
 \underline{18} 36,166... \\
 \underline{37} \\
 \underline{36} \\
 10 \\
 \underline{6} \\
 40 \\
 \underline{36} \\
 40 \\
 \underline{36} \\
 \dots
 \end{array}$$

(Д.1)

В результате остается некоторая неясность: *почему* обыкновенная неправильная дробь $\frac{217}{6}$ и полученная в (Д.1) десятичная запись $36,166...$ — это одно и то же?

Будем вначале действовать, как в п. 17. Рассмотрим множество A , состоящее из 217 счетных палочек, связанных в десятки и сотни, и постараемся разложить их поровну в шесть одинаковых корзинок (в каждой из которых имеются две полки). Вначале развяжем сотни и разложим поровну (по 3 десятка) на вторые (считая снизу вверх) полки корзинок; при этом три десятка счетных палочек окажутся «лишними». Развяжем эти «лишние» десятки, присоединим к ним оставшиеся семь одиночных палочек и разложим поровну (по 6 штук) на первые полки корзинок; при этом одна счетная палочка окажется «лишней» (см. рис. Д.1).

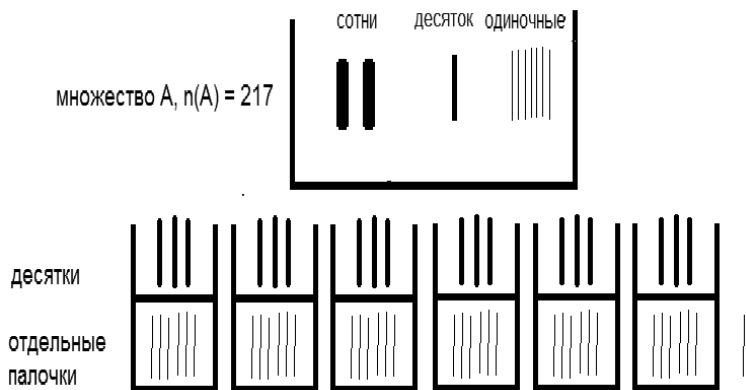


Рис. Д.1

Однако на этот раз (в отличие от наших действий в п. 17) мы не остановимся, согласившись с существованием «остаточного множества», состоящего из «лишней» счетной палочки, а продолжим нашу процедуру. С этой целью под каждой из шести корзинок устроим ведущую вниз последовательность нижних полок, которые будем нумеровать последовательно, считая теперь сверху вниз (первая нижняя полка, вторая нижняя полка, и т.д.); см. рис. Д.2.

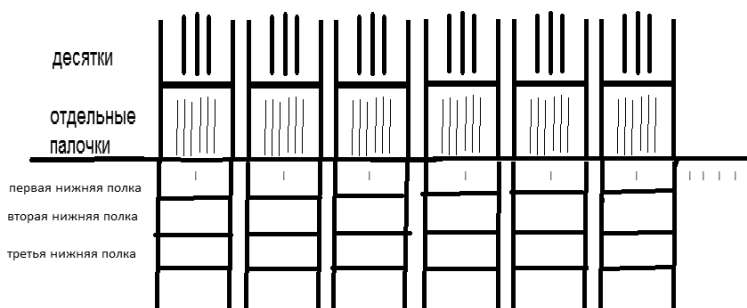


Рис. Д.2

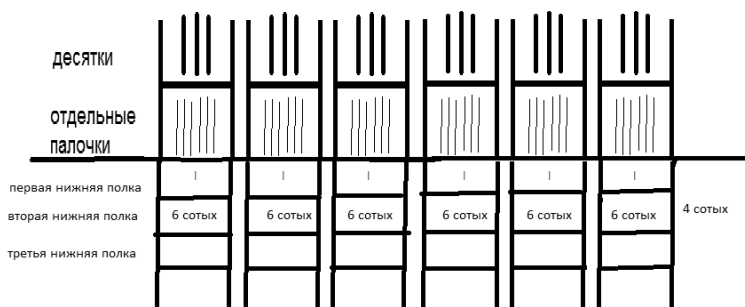


Рис. Д.3

Дальнейшие наши действия понятны из рис. Д.2 и Д.3. «Лишнюю» палочку мы разламываем на 10 одинаковых частей и эти десятые доли распределяем поровну (по одной штуке) на первые нижние полки; при этом 4 десятых доли окажутся «лишними» - их невозможно разложить поровну по шести вторым нижним полкам. Поэтому разламываем каждую из этих десятых долей еще раз на 10 частей, получаем 40 сотых долей, которые распределяем поровну (по шесть штук) по вторым нижним полкам; при этом 4 сотых доли остаются «лишними». Их снова разламываем, и т.д.

Теперь становится геометрически очевидно, что содержимое любой из корзин (т.е. совокупность палочек на верхних полках и долей палочек на нижних полках) представляет собой в точности одну шестую от исходного количества палочек (т.е. от 217).

Итак, равенство

$$\frac{217}{6} = 36, 166... \quad (\text{Д.2})$$

получило свое геометрическое истолкование.

Добавление 3. О десятичной системе сосудов и переводе из р-ичной системы счисления в q-ичную

Выше мы убедились в том, что построение десятичной записи натурального числа удобно проводить, опираясь на предметные действия – связывание и раскладывание по корзинам счетных палочек. При этом построение естественным образом начинались с младших разрядов, а затем на следующих шагах шло продвижение в сторону старших разрядов. А именно, для установления десятичной записи числа (численности набора счетных палочек) сначала связывали палочки десятками, причем численность оставшихся несвязанными палочек представляла собой младшую цифру искомой десятичной записи. Затем связывали десятки десятков, и т.д.

Любопытно, что формирование десятичной записи числа (также опираясь на предметные действия) в некоторых ситуациях не просто возможно, но даже удобнее начинать со старших разрядов. Речь идет о формировании десятичной записи измеренного (например, в литрах) заранее неизвестного объема жидкости.

Итак, пусть имеется ведро неизвестной емкости, наполненное водой. (Вначале для определенности считаем, что в ведре находится целое число литров воды.) Пусть, далее, в нашем распоряжении имеется десять литровых сосудов, десять 10-литровых сосудов, десять 100-литровых сосудов и т.д., расположенных, как показано на рис. Д.4.

(Такую систему сосудов мы будем называть «десятичной».)

Определяем «на глаз», что имеющаяся в ведре вода заполнит доверху по крайней мере один 100-литровый сосуд, но не заполнит (доверху) ни одного 1000-литрового. Теперь

наливаем воду из ведра в 100-литровые сосуды, по возможности наполняя их доверху (см. рис. Д.5).

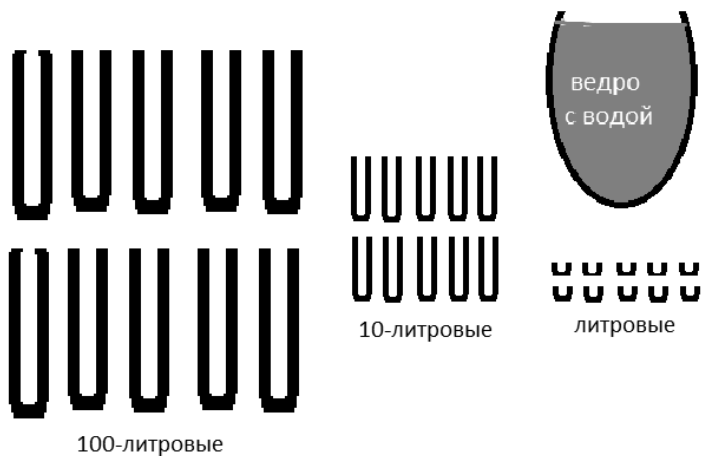


Рис. Д.4

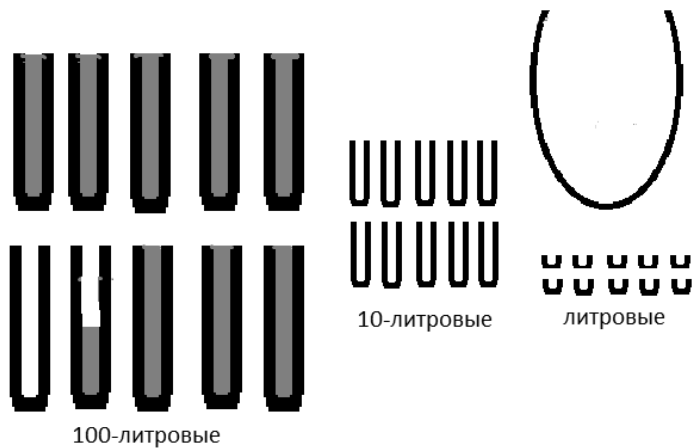


Рис. Д.5

Следующий наш шаг таков: воду из не полностью заполненного 100-литрового сосуда переливаем в 10-литровые, снова по возможности наполняя их доверху (см. рис. Д.6).

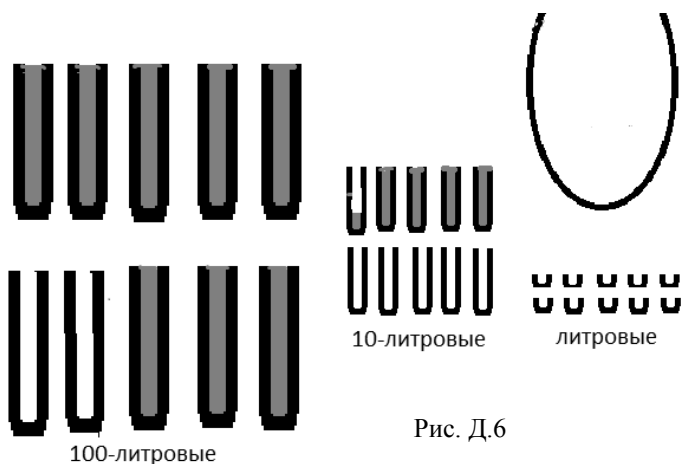


Рис. Д.6

Наконец, воду из не полностью заполненного 10-литрового сосуда переливаем в литровые сосуды (см. рис. Д.7).

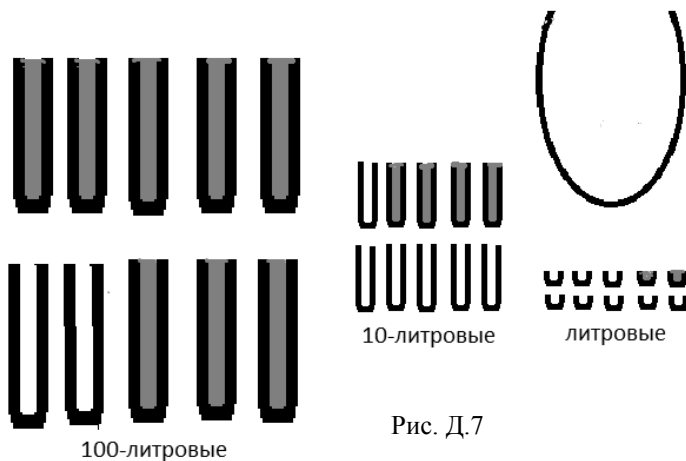


Рис. Д.7

Итак, первоначально в ведре было 842 литра воды.

Замечание. Откажемся теперь от предположения о том, что первоначально в ведре содержалось целое число литров воды. Тогда нашу процедуру нужно продолжить, используя сосуды емкостью в $1/10$ литра, $1/100$ литра и т.д.

Замечание. Предложенная выше процедура очевидным образом может быть модифицирована для перевода r -ичной записи натурального числа в q -ичную, не только минуя десятичную запись, но и вообще без каких-либо вычислений. (Здесь r и q – любые натуральные числа, большие единицы.) Для этого достаточно иметь две системы сосудов (« r -ичную» и « q -ичную»), устроенные аналогично десятичной системе сосудов, рассмотренной выше.

Литература

1. Добротворский А.С., Иванова Е.А., Локшин А.А. Количественная теория натуральных чисел. – М.: МАКС Пресс, 2017.
2. Мерзон А.Е., Добротворский А.С., Чекин А.Л. Пособие по математике для студентов факультетов начальных классов. – М., 1998.
3. Локшин А.А., Иванова Е.А. Множества и логика. – М.: МАКС Пресс, 2017.
4. Котов А.Я. Вечера занимательной математики. – М.: Просвещение, 1967, с. 76.
5. Волков А. Арифметические действия у древних римлян / Наука и жизнь, 1970. <http://lib.ru/NTL/ARTICLES/arifmetica.txt>
6. Локшин А.А., Иванова Е.А., Шилтова О.И. Деление на равные части и римский способ деления (в печати).